

TP 1 (Theoretische Mechanik) – Winter 24/25 – Übungszettel 14

PD Dr. Stephan Dürr	duerr (AT) uni-wuppertal (DOT) de	G.11.44
M.Sc. Fabian Frech	fabian.frech (AT) uni-wuppertal (DOT) de	G.11.39
B.Sc. Tolga Kiel	tolga.kiel (AT) uni-wuppertal (DOT) de	G.11.07

Abgabe: Do 30.Jan.2025 in Papierform zu Beginn der Vorlesung

1. Rechteckige Trommel

(8 Punkte)

Betrachten Sie eine zweidimensionale elastische Membran im Gebiet $(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$, die an den Rändern fest eingespannt ist (sog. Dirichlet-Randbedingungen). Sei $u(t, x, y)$ die Auslenkung in z -Richtung am Punkt (x, y) zur Zeit t . Als Bewegungsgleichung findet man (analog zur Saite)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

wobei c die Membran-Wellengeschwindigkeit bezeichnet. Dass letztere durch $c = \sqrt{\tau/\rho}$ gegeben ist, wo ρ die Masse pro Fläche und τ die zur Kraft F analoge Grösse bezeichnet, ist hier unwichtig.

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $u(t, x, y) = f(t)g(x)h(y)$ mit

$$f(t) = C_f \sin(\omega t - \phi_f), \quad g(x) = C_g \sin(k_x x - \phi_g), \quad h(y) = C_h \sin(k_y y - \phi_h)$$

die Wellengleichung (partielle Differentialgleichung 2. Ordnung) ohne Berücksichtigung der Randbedingungen löst, falls man die Frequenz ω richtig von den Wellenzahlen k_x, k_y abhängig lässt.

b) Welche Einschränkungen an die Parameter ergeben sich aus den eingangs angesprochenen Randbedingungen $g(0) = g(L_x) = 0$ und $h(0) = h(L_y) = 0$?

c) Was ändert sich, wenn Sie in jede Richtung am oberen Intervallende Neumann-Randbedingungen verlangen, d.h. $g(0) = g'(L_x) = 0$ und $h(0) = h'(L_y) = 0$?

d) Was ändert sich, wenn Sie in jede Richtung an beiden Intervallenden Neumann-Randbedingungen verlangen, d.h. $g'(0) = g'(L_x) = 0$ und $h'(0) = h'(L_y) = 0$?

e) Wählen Sie eine der unter (b, c, d) angesprochenen Randbedingungen und zeigen Sie, dass für diese Randbedingung die allgemeine Lösung der Wellengleichung einer zweidimensionalen Fourierreihe

$$u(t, x, y) = \sum_{n_x} \sum_{n_y} c_{n_x, n_y} u_{n_x, n_y}(t, x, y)$$

entspricht, wobei Sie angeben sollen über welche n_x, n_y summiert wird. Die Funktion $u_{n_x, n_y}(t, x, y)$ haben Sie idealerweise schon in Ihrer Lösung der entsprechenden Teilaufgabe (b, c, d) definiert.

2. Relativistische Raketengleichung

(8 Punkte)

Eine Masse m werde in momentanen Ruhesystem \tilde{S} in Teilmassen m_1, m_2 mit v_1, v_2 aufgespalten.

a) Weshalb gilt $m \neq m_1 + m_2$ und wie sieht die Beziehung korrekt aus?

b) Betrachten Sie m_2 als die infinitesimale Masse, die in \tilde{S} mit der Düsendeschwindigkeit w ausgestossen wird. Argumentieren Sie weshalb $\frac{dm}{m} = -\frac{d\tilde{v}}{w}$ gilt, wo $v_1 = d\tilde{v}$ die Geschwindigkeit der Rakete in \tilde{S} nach dem infinitesimalen Ausstoss ist.

c) Nutzen Sie die relativistische Geschwindigkeitssuperposition, um $v+dv$ aus v und $d\tilde{v}$ zu bestimmen und zeigen Sie, dass daraus die relativistische Raketengleichung

$$\frac{dv/c}{1 - v^2/c^2} = -\frac{w}{c} \frac{dm}{m}$$

folgt. Was bedeutet jede dieser Grössen genau? Vergleich mit nicht-relativistischer Fassung?

d) Zeigen Sie, dass durch Integration

$$\frac{1 + v/c}{1 - v/c} = \left(\frac{m(v)}{m_0} \right)^{-2w/c} \quad \text{oder} \quad \frac{v}{c} = \frac{1 - (m(v)/m_0)^{2w/c}}{1 + (m(v)/m_0)^{2w/c}}$$

folgt, wenn m_0 die Startmasse im System S der Startrampe ist.

3. Extraterrestrische Ambitionen

(4 Punkte)

Bei der Suche nach habitablen Exoplaneten ist jemandem aufgefallen, dass man abschätzen sollte, wie lange der zugehörige Zentralstern wohl noch lebt. Das vielversprechende "Objekt X" ist von seinem Zentralstern etwa 180 Millionen km entfernt. Letzterer hat eine Masse von $8 \cdot 10^{29}$ kg, und die Strahlungsleistung des Sterns am Ort des Exoplaneten wird mit 1200 W/m^2 veranschlagt. Wie lange kann dieser Zentralstern maximal noch leben, wenn Sie annehmen, dass er seine Energie aus einer nuklearen Fusionsreaktion bezieht, die 0.5% der verfügbaren Masse in Strahlungsenergie umwandelt?